Линейное программирование

Задача №1. Составить экономико-математическую модель задачи

Условие

В течение месяца мастерская может выполнять три вида работ А, В, С при средней трудоемкости работ: А-3 часа, В-3 часа, С-3 часа. Мастерской установлен план прибыли не менее 1500 д.е. и план обслуживания услугой В не менее 500 клиентов. Прибыль от выполнения работ: А-3 д.е., В-1 д.е., С-1,5 д.е. Количество сырья составляет 5000 д.е., а нормы расходов сырья на единицу продукции равно: А-3 ед., В-2 ед., С-3 ед. Составьте план выполнения услуг в количестве и ассортименте, обеспечивающий наименьшие трудозатраты.

Решение

Условия задачи указанного класса часто представляют в табличной форме:

Виды работ	**затраты**		**Прибыль от работ, д.е.**
	Трудоемкость, ч	Сырье, д.е.	
А	3	3	3
В>500 клиентов	3	2	1
С	3	3	1,5
Запасы , д.е.	-	5000	>1500

По данному условию сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1 - количество выполняемых ежемесячно работ вида А, x_2 - количество выполняемых ежемесячно работ вида В и x_3 - количество выполняемых ежемесячно работ вида С.

Формулировка ЗЛП:

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5000; \\ 3x_1 + x_2 + 1.5x_3 > 1500; \\ x_2 > 1500; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решим в Excel'е:

D3 f_x =A3*A2+B3*B2+C3*C2

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2	x3	f		
2	0	1500	0			
3	3	3	3	4500		
4	3	2	3	5000	3000	
5	3	1	1,5	1500	1500	
6		1500				

План, обеспечивающий самые минимальные затраты по трудоемкости – это предоставление услуги В в размере 1500 единиц. Функция трудозатрат в этом случае $f(\bar{x}) = 3 * 1500 = 4500$.

Ответ: В = 1500 ед.

Задача №2. Решить следующие задачи линейного программирования графическим методом

Условие

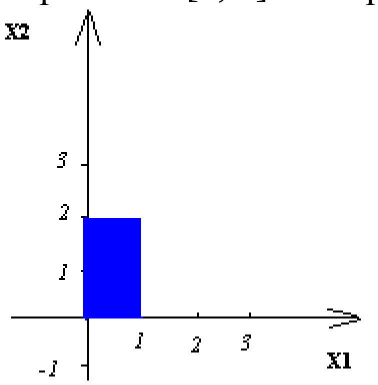
$$L = x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 1; \\ 0 \le x_2 \le 2; \\ 0 \le x_1 + x_2 \le 3; \\ -1 \le x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$$

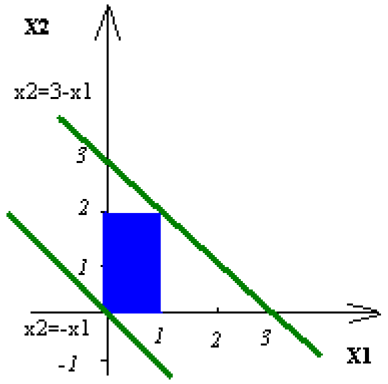
Решение

Рассматриваем каждое из ограничений отдельно:

1) Первое и второе ограничение: $0 \le x_1 \le 1$ и $0 \le x_2 \le 2$. Первое - отрезок оси X1 – [0; 1], второе X2 – [0; 2]. Изобразим их:

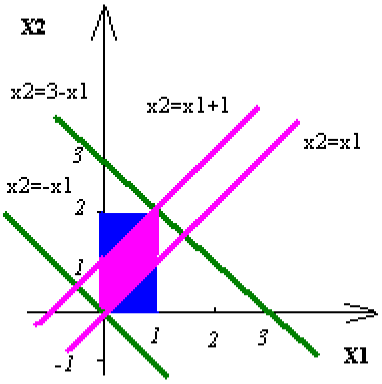


2) Третье условие: $0 \le x_1 + x_2 \le 3$. Разобьем его на два: $x_1 + x_2 \ge 0$ и $x_1 + x_2 \le 3$. Откуда получаем: $x_2 \ge -x_1$ и $x_2 \le 3 - x_1$. Изобразим прямые $x_2 = -x_1$ и $x_2 = 3 - x_1$ и соответственно знаку неравенства выбираем нужную нам полуплоскость:



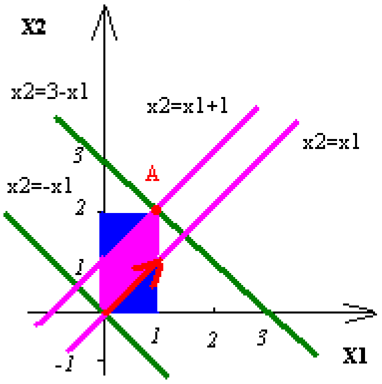
С учетом второго условия наша область осталась той же.

3) Четвертое условие: $-1 \le x_1 - x_2 \le 0$. Разобьем его на два: $x_1 - x_2 \ge -1$ и $x_1 - x_2 \le 0$. Откуда получаем: $x_2 \le x_1 + 1$ и $x_2 \ge x_1$. Изобразим прямые $x_2 = x_1 + 1$ и $x_2 = x_1$ и соответственно знаку неравенства выбираем нужную нам полуплоскость:



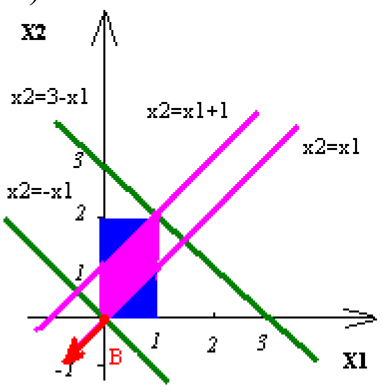
Область фиолетового цвета – и есть область определения нашей функции - $L = x_1 + x_2 \to \max(\min)$.

1) Сначала найдем ее максимум: для этого построим прямую $x_1 + x_2 = 0 \;\; \to \;\; x_2 = -x_1$. Она у нас уже есть на графике. Теперь построим градиент – вектор (1; 1) – и будем двигаться по нему:



Самой крайней точкой области при этом окажется А – точка пересечения прямых $x_2 = x_1 + 1 \;\; и \;\; x_2 = 3 - x_1$, с координатами А(1; 2). Это значит, что при $x_1 = 1 \;\; и \;\; x_2 = 2$ достигается максимум целевой функции, равный 3.

2) Теперь найдем минимум целевой функции $L = x_1 + x_2$. Прямая $x_1 + x_2 = 0 \;\; \to \;\; x_2 = -x_1$ уже построена. Теперь будем двигаться по антиградиенту – вектору (-1; -1) от края области (прямой $x_2 = 3 - x_1$ и т. А до крайней возможной точки области):



Этой точкой оказывается т. В с координатами (0; 0). Что значит, что при $x_1 = 0 \;\; и \;\; x_2 = 0$ достигается минимум целевой функции, равный 0.

Ответ: $x_1 = 1 \;\; и \;\; x_2 = 2$ и $x_1 = 0 \;\; и \;\; x_2 = 0$.

Задача №3. Решить задачи линейного программирования графическим методом и провести анализ на чувствительность

Условие

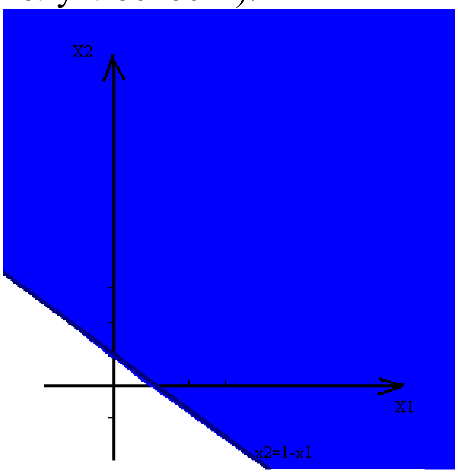
$$L = 2x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

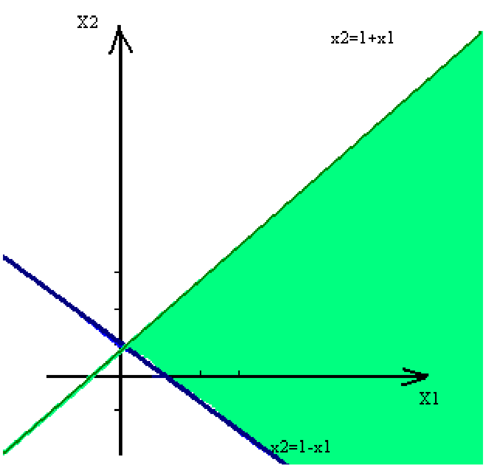
Решение

Аналогично задаче 2 рассматриваем каждое из ограничений отдельно:

1) Первое условие: $x_1 + x_2 \ge 1$. Получаем: $x_2 \ge 1 - x_1$. Изобразим прямую $x_2 = 1 - x_1$ и соответственно знаку неравенства выбираем верхнюю полуплоскость (какая полуплоскость подходит можно проверить, подставив точку, например, (0; 0) в неравенство, и если оно выполняется, то это и есть необходимая полуплоскость):

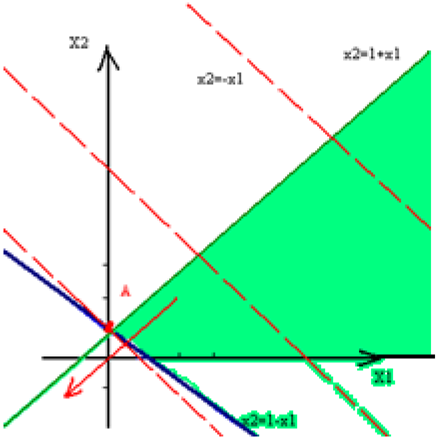


2) Второе условие: $-x_1 + x_2 \le 1$. Получаем: $x_2 \le 1 + x_1$. Изобразим прямую $x_2 = 1 + x_1$ и соответственно знаку неравенства выбираем нижнюю полуплоскость:



С учетом последних двух условий $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, полученная область и есть область определения нашей функции - $L = 2x_1 + 2x_2$.

Теперь можем найти минимум целевой функции $L = 2x_1 + 2x_2$. Построим соответствующую целевой функции прямую, для этого приравняем ее к нулю: $2x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -x_1$. Затем строим антиградиент – вектор, обратный вектору нормали к нашей прямой (2; 2). Затем, двигая нашу прямую от правого края области по направлению антиградиента, получаем крайнюю точку области – т. А:



Т. А – точка пересечения прямых $\begin{cases} x_2 = 1 - x_1; \\ x_2 = 1 + x_1. \end{cases}$. Решая систему, получаем, что при А(0; 1), следовательно, при $x_1 = 0$ *и* $x_2 = 1$ достигается минимум целевой функции, равный 2.

Проанализируем чувствительность оптимального решения нашей задачи. В оптимальной точке А пересекаются прямые (1) и (2). Поэтому ограничения (1) и (2) являются связывающими, а соответствующие им ресурсы (x_1 и x_2) – дефицитными. Однако, с учетом разного знака неравенств, получаем, что нет возможности уменьшить никакой из дефицитных ресурсов, чтобы получить еще меньшее значение целевой функции. А недефицитных ресурсов нет. И движение прямых для ограничений не возможно ни выше, ни ниже, так как мы заходим за оптимальную точку.

Ответ: $x_1 = 0$ *и* $x_2 = 1$.

Задача №4. Решить задачу линейного программирования с n переменными графическим методом

Условие

$$L = x_1 - x_4 \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Решение задачи сводиться к нахождению угловых точек (метод перебора вершин). Будем использовать графическое представление граней допустимого множества. Грани допустимого многогранника X задаются следующими ограничениями:

Ãðàí ü $F_1 : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5;$

Ãðàí ü $F_2 : x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1;$

Ãðàí ü $F_3 : x_1 = 0;$

Ãðàí ü $F_4 : x_2 = 0;$

Ãðàí ü $F_5 : x_3 = 0;$

Ãðàí ü $F_6 : x_4 = 0.$

Всякая вершина V многогранника X принадлежит каким-либо четырем его граням (так как система из 4х переменных). Есть только одна вершина – O(0; 0; 0; 0), которая принадлежит одновременно граням F_3, F_4, F_5 и F_6. Таким образом, множество всех вершин многогранника X состоит из вершин граней F_1 и F_2 и т.О. Для каждой грани F_1 и F_2, используя единственное уравнение среди ограничений, задающих данную грань, выразим x_4 через x_1, x_2 и x_3 и подставим полученное выражение во все остальные неравенства, задающие грань. В результате этих эквивалентных преобразований системы ограничений для граней F_1 и F_2 примут вид:

Ãðàí ü F_1

$$\begin{cases} (1)\ x_4 = 5 - x_1 - x_2 - 2x_3; \\ (2)\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9; \\ (3)\ x_1 \ge 0; \\ (4)\ x_2 \ge 0; \\ (5)\ x_3 \ge 0; \\ (6)\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 5; \end{cases}$$

Ãðàí ü F_2

$$\begin{cases} (1)\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9; \\ (2)\ x_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{x_3}{2}; \\ (3)\ x_1 \ge 0; \\ (4)\ x_2 \ge 0; \\ (5)\ x_3 \ge 0; \\ (6) - x_1 + x_2 + x_3 \ge -1. \end{cases}$$

Для каждой грани F_1 и F_2, используя последнее неравенство (6), представленное уравнением, выразим x_3 через x_1, x_2 и подставим полученное выражение во все остальные неравенства, задающие грань. В результате этих эквивалентных преобразований системы для граней F_1 и F_2 примут вид:

Ãðàí ü F_1

$$\begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (2)\ -3x_1 + x_2 = -7; \\ (3)\ x_1 \ge 0; \\ (4)\ x_2 \ge 0; \\ (5)\ 5 - x_1 - x_2 \ge 0; \\ (6)\ x_3 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_2}{2}; \end{cases}$$

Ãðàí ü F_2

$$\begin{cases} (1)\ -3x_1 + x_2 = -7; \\ (2)\ x_4 = 0; \\ (3)\ x_1 \ge 0; \\ (4)\ x_2 \ge 0; \\ (5)\ x_1 - x_2 \ge 1; \\ (6)\ x_3 = -1 + x_1 - x_2. \end{cases}$$

Используя полученные ограничения для граней F_1 и F_2, построим на плоскости x_1 и x_2 проекцию граней F_1 и F_2 на эту плоскость:

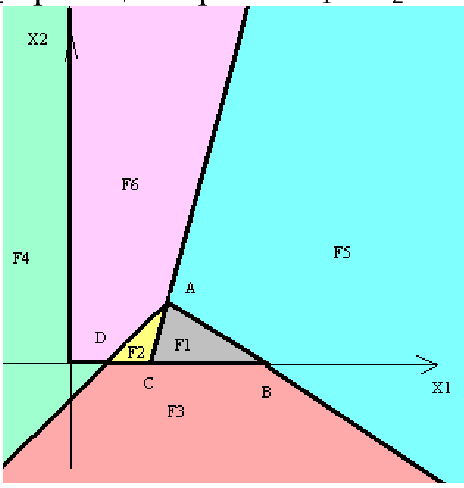


Рисунок показывает, что вершинами грани F_1 являются следующие точки: $A = F_1 \cap F_2 \cap F_5 \cap F_6$; $B = F_1 \cap F_3 \cap F_5$; $C = F_1 \cap F_2 \cap F_3$; а вершинами грани F_2: $A = F_1 \cap F_2 \cap F_5 \cap F_6$; $C = F_1 \cap F_2 \cap F_3$; $D = F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_6$. Найдем координаты вершин, составив соответствующие системы уравнений:

A:

$$\begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (2)\ -3x_1 + x_2 = -7; \\ (5)\ 5 - x_1 - x_2 = 0; \\ (6)\ x_3 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_2}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (2) x_2 = 2; \\ (5)\ x_1 = 3; \\ (6)\ x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A}(3; 2; 0; 0).$$

B:

$$\begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (3)\ x_1 = 0; \\ (5)\ 5 - x_1 - x_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (3)\ x_1 = 0; \\ (5)\ x_2 = 5; \end{cases} \Rightarrow B(0; 5; 0; 0).$$

C:

$$\begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (2)\ -3x_1 + x_2 = -7 \\ (3)\ x_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x_4 = 0; \\ (2)\ x_2 = -7 \\ (3)\ x_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow C(0; -7; 0; 0).$$

D í å î ï ðåäåëèì à :

$$\begin{cases} (2)\ -3x_1 + x_2 = -7; \\ (3)\ x_1 = 0; \\ (4)\ x_2 = 0; \\ (6)\ x_3 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_2}{2}. \end{cases}$$

Итак, вершинами допустимого множества являются следующие точки: O, A, B, C. Поэтому максимальное значение целевой функции $L = x_1 - x_4$: $L_{\max} = \max\{L(O), L(A), L(B), L(C)\} = \max\{0; 3; 0; 0\} = 3$ и достигается он в точке A. A минимум - $L_{\min} = \min\{L(O), L(A), L(B), L(C)\} = \min\{0; 3; 0; 0\} = 0$ и достигается он в точках O, B, C.

Ответ: $L_{\max} = L(A) = 3, L_{\min} = L(O) = L(B) = L(C) = 0$.

Задача №5. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

Условие

$L = 2x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Приведем задачу к следующему виду:

$\min(2x_1 - x_2);$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Введем дополнительные переменные $x_3, x_4, x_5 \ge 0$, тогда задача примет стандартный (канонический) вид:

$\min(2x_1 - x_2 + 0\,\tilde{o}_3 + 0\,\tilde{o}_4 + 0\,\tilde{o}_5)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2; \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 0; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Базисные переменные - это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом. Решим систему уравнений относительно базисных переменных x_3, x_4, x_5. Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план – $X_0 = (0,0,11,2,0)$.

Базис	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	11	3	2	1	0	0
x_4	2	1	1	0	1	0
x_5	0	1	-3	0	0	1
$L(X_0)$	0	-2	1	0	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты. Определим ведущий элемент, для этого сначала определяем ведущий столбец – соотстветствующий x_2, так как это наибольший коэффициент в строке $L(X_0)$. Далее определяем ведущую строку, для этого вычисляем значения b_i/a_{i2} и из них выбираем наименьшее - $\min\left(\frac{11}{2}, \frac{2}{1}, -\right) = 2$, следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки. Получаем:

Базис	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	11	3	2	1	0	0
x_4	2	1	1	0	1	0
x_5	0	1	-3	0	0	1

$L(X_0)$	0	-2	1	0	0	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план X_1 войдет переменная x_2 . Строка, соответствующая переменной x_2 в плане X_1, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана X_0 на разрешающий элемент. На месте разрешающего элемента в плане X_1 получаем 1. В остальных клетках таблицы плана X_1 производим пересчет, таким образом, чтобы с столбце x_2 плана X_1 получились 0. Например. Первую строку плана X_1 пересчитываем так: 11-2*(2/1)=7, 3-1*(2/1)=1, 2-1*(2/1)=0, 1-0*(2/1)=1, 0-1*(2/1)= -2 и 0-0*(2/1)=0. Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	**B**	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$
x_3	7	1	0	1	-2	0
x_2	2	1	1	0	1	0
x_5	6	4	0	0	3	1
$L(X_1)$	-2	-3	0	0	-1	0

В индексной строке (выделено красным) нет положительных значений. Следовательно, найден оптимальный план задачи: $x_2 = 2$ и $L(X) = -1*2 = -2$.

Ответ: $x_2 = 2$ и $L(X) = -1*2 = -2$.

Задача №6. Решить задачу линейного программирования табличным симплексным методом

Условие

$L = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max(\min);$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Введем искусственные переменные $x_6, x_7, x_8 \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 9; \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_8 = 6. \end{cases}$$

1) Для постановки задачи на **минимум** целевую функцию запишем так:

$L(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8 \to \min.$

Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса. Из уравнений выражаем искусственные переменные:

$$\begin{cases} x_6 = 5 - x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5; \\ x_7 = 9 - x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5; \\ x_8 = 6 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5; \end{cases}$$

которые подставим в целевую функцию:

$L(X) = (1-2M)x_1 + (2-3M)x_2 + (1-2M)x_3 + (3-7M)x_4 + (1-4M)x_5 + (20M) \to \min.$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_6, x_7, x_8. Полагая, что свободные переменные равны 0, получаем первый опорный план:

$X_0 = (0,0,0,0,0,5,9,6)$.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	5	1	1	0	2	1	1	0	0
x_7	9	1	1	1	3	2	0	1	0
x_8	6	0	1	1	2	1	0	0	1
$L(X_0)$	20M	-1+2M	-2+3M	-1+2M	**-3+7M**	-1+4M	0	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4, так как 3 - наибольший коэффициент. Вычислим значения b_i $/a_{i4}$ и из них выберем наименьшее: $\min(5/2, 9/3, 6/2) = 2.5$. Следовательно, 1-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки. Далее аналогично задаче 5 получаем следующие симплекс-таблицы:

Базис	**B**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**
x_6	5	1	1	0	2	1	1	0	0
x_7	9	1	1	1	3	2	0	1	0
x_8	6	0	1	1	2	1	0	0	1
$L(X_0)$	20M	-1+2M	-2+3M	-1+2M	-3+7M	-1+4M	0	0	0
x_4	2.5	0.5	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0

x_7	1.5	-0.5	-0.5	1	0	0.5	-1.5	1	0
x_8	1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
$L(X_1)$	7.5+2.5M	0.5-1.5M	-0.5-0.5M	-1+2M	0	0.5+0.5M	1.5-3.5M	0	0
x_4	2.5	0.5	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0
x_7	0.5	0.5	-0.5	0	0	0.5	-0.5	1	-1
x_3	1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
$L(X_2)$	8.5+0.5M	-0.5+0.5M	-0.5-0.5M	0	0	0.5+0.5M	0.5-1.5M	0	1-2M
x_4	2	0	1	0	1	0	1	-1	1
x_5	1	1	-1	0	0	1	-1	2	-2
x_3	1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
$L(X_3)$	8	-1	0	0	0	0	1-1M	-1-1M	2-1M

В индексной строке нет положительных элементов. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи: $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$ и $L(X) = 1*1 + 3*2 + 1*1 = 8$.

2) Теперь найдем **максимум** целевой функции, которая принимает вид:

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \to \max.$$

Выразим из уравнений искусственные переменные и, подставив их в целевую функцию, получаем:

$$L(X) = (1+2M)x_1 + (2+3M)x_2 + (1+2M)x_3 + (3+7M)x_4 + (1+4M)x_5 + (-20M) \to \max.$$

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	5	1	1	0	2	1	1	0	0
x_7	9	1	1	1	3	2	0	1	0
x_8	6	0	1	1	2	1	0	0	1
$L(X_0)$	-20M	-1-2M	-2-3M	-1-2M	**-3-7M**	-1-4M	0	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4, так как это наибольший коэффициент по модулю. Вычислим значения b_i/a_{i4} и из них выберем наименьшее: $\min(5/2, 9/3, 6/2) = 2.5$. Следовательно, 1-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки. Получаем следующие симплекс-таблицы:

Базис	**B**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**
x_6	5	1	1	0	2	1	1	0	0
x_7	9	1	1	1	3	2	0	1	0
x_8	6	0	1	1	2	1	0	0	1
$L(X_0)$	-20M	-1-2M	-2-3M	-1-2M	-3-7M	-1-4M	0	0	0
x_4	2.5	0.5	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0
x_7	1.5	-0.5	-0.5	1	0	0.5	-1.5	1	0
x_8	1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
$L(X_1)$	7.5-2.5M	0.5+1.5M	-0.5+0.5M	-1-2M	0	0.5-0.5M	1.5+3.5M	0	0
x_4	2.5	0.5	0.5	0	1	0.5	0.5	0	0
x_7	0.5	0.5	-0.5	0	0	0.5	-0.5	1	-1
x_3	1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
$L(X_2)$	8.5-0.5M	-0.5-0.5M	-0.5+0.5M	0	0	0.5-0.5M	0.5+1.5M	0	1+2M

x_4	2	0	1	0	1	0	1	-1	1
x_1	1	1	-1	0	0	1	-1	2	-2
x_3	2	0	-1	1	0	1	-2	2	-1
$L(X_3)$	9	0	-1	0	0	1	1M	1+1M	1M
x_2	2	0	1	0	1	0	1	-1	1
x_1	3	1	0	0	1	1	0	1	-1
x_3	4	0	0	1	1	1	-1	1	0
$L(X_4)$	11	0	0	0	1	1	1+1M	1M	1+1M

В индексной строке нет отрицательных значений. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ и $L(X) = 1*3 + 2*2 + 1*4 = 11$.

Ответ: $L_{min}(0; 0; 1; 2; 1) = 8$; $L_{max}(3; 2; 4; 0; 0) = 11$.

Задача №7. Решить задачу линейного программирования табличным симплекс-методом и провести анализ на чувствительность

Условие

$L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Решение

Введем искусственные переменные $x_5,\ x_6,\ x_7 \ge 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10. \end{cases}$$

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так: $L(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \to \min$. Из уравнений выражаем искусственные переменные:

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4; \\ x_6 = 10 - x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4; \\ x_7 = 10 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4; \end{cases}$$

которые подставляем в целевую функцию:

$L(X) = (2-5M)x_1 + (1-4M)x_2 + (2-5M)x_3 + (2-5M)x_4 + 28M \to \min$.

Решаем систему уравнений относительно базисных переменных: $x_5,\ x_6,\ x_7$.

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план: $X_0 = (0,0,0,0,8,10,10)$.

Базис	**B**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**
x_5	8	2	1	2	1	1	0	0
x_6	10	1	2	1	2	0	1	0
x_7	10	2	1	2	2	0	0	1
$L(X_0)$	28M	-2+5M	-1+4M	-2+5M	**-2+5M**	0	0	0
x_5	3	1.5	0	1.5	0	1	-0.5	0
x_4	5	0.5	1	0.5	1	0	0.5	0
x_7	0	1	-1	1	0	0	-1	1
$L(X_1)$	10+3M	-1+2.5M	1-1M	-1+2.5M	0	0	1-2.5M	0
x_5	3	0	1.5	0	0	1	1	-1.5
x_4	5	0	1.5	0	1	0	1	-0.5
x_3	0	1	-1	1	0	0	-1	1
$L(X_2)$	10+3M	0	1.5M	0	0	0	0	1-2.5M
x_2	2	0	1	0	0	2/3	2/3	-1
x_4	2	0	0	0	1	-1	0	1
x_3	2	1	0	1	0	2/3	-1/3	0
$L(X_3)$	10	0	0	0	0	-1M	-1M	1-1M

В индексной строке нет положительных элементов. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи: $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$ и $L(X) = 1*2 + 2*2 + 2*2= 10$.

Примечание: в первой симплекс-таблице в последнем столбце присутствовало два минимальных элемента, равных 5, поэтому номер ведущей строки выбирали по правилу Креко: элементы строк, имеющих одинаковые наименьшие значения, делятся на предполагаемые разрешающие элементы. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

Проведем проверку на чувствительность.

Элементы базиса x_2, x_3, x_4 являются дефицитными (так как расходуются полностью).

1) Чувствительность оптимального решения на изменение правых частей (первая задача на чувствительность).

Чтобы определить вышеуказанный интервал, необходимо выполнить ряд дополнительных вычислений.

а) Положим, что запас ресурса 1 стал $8+\Delta_2$. Получаем:

L	10	
x_2	$2+(2/3)*\Delta_2 \geq 0$	(1)
x_3	$2-1*\Delta_2 \geq 0$	(2)
x_4	$2+(2/3)*\Delta_2 \geq 0$	(3)

Из таблицы видно, что правая часть представляет собой сумму двух величин: постоянной и линейно зависящей от Δ_2. Постоянные соответствуют числам, которые фигурируют в правых частях ограничений до введения Δ_2. Коэффициенты во втором слагаемом равны коэффициентам при x_5, так как только она связана со вторым ограничением. Значение Δ_2 определяется из условия неотрицательности правых частей ограничений в результирующей симплекс-таблице. Для определения допустимого интервала значений рассмотрим два случая:

1) $\Delta_2 \geq 0$.

Соотношения (1) и (3) выполняются в любом случае, соотношение (3) справедливо только при $\Delta_2 \leq 2$, таким образом, все три соотношения выполняются при $\Delta_2 \leq 2$.

2) $\Delta_2 < 0$.

Соотношения (2) всегда выполняется, соотношения (1) и (3) выполняются соответственно при $\Delta_2 \geq -3$ и $\Delta_2 \geq -3$, таким образом, все три соотношения выполняются при $\Delta_2 \geq -3$. Объединяя результаты вычислений $-3 \leq \Delta_2 \leq 2$ − для ресурса 1, получим уменьшение запаса ресурса 1 более чем на 3 и увеличение более чем на 2. Изменение запаса ресурса 1 будет равно: $-3+8 \leq$ ресурс $1 \leq 2+8$ или $5 \leq$ ресурс $1 \leq 10$.

б) Положим, что запас ресурса 2 стал $10+\Delta_3$. Получаем:

L	10	
x_2	$2-1*\Delta_3 \geq 0$	(1)
x_3	$2+1*\Delta_3 \geq 0$	(2)
x_4	$2+0*\Delta_3 \geq 0$	(3)

Для определения допустимого интервала значений рассмотрим два случая:

1) $\Delta_3 \geq 0$.

Соотношения (2) и (3) выполняются в любом случае, соотношение (1) справедливо только при $\Delta_3 \leq 2$, таким образом, все три соотношения выполняются при $\Delta_3 \leq 2$.

2) $\Delta_3 < 0$.

Соотношения (1) и (3) всегда выполняются, соотношения (2) выполняется при $\Delta_3 \geq -2$, таким образом, все три соотношения выполняются при $\Delta_3 \geq -2$. Объединяя результаты вычислений $-2 \leq \Delta_2 \leq 2$ − для ресурса 2, получим уменьшение запаса ресурса 2 более чем на 2 и увеличение более чем на 2. Изменение запаса ресурса 2 будет равно: $-2+10 \leq$ ресурс $2 \leq 2+10$ или $8 \leq$ ресурс $2 \leq 12$.

в) Положим, что запас ресурса 3 стал $10+\Delta_4$. Получаем:

L	10	
x_2	$2+(2/3)*\Delta_4 \geq 0$	(1)
x_3	$2+0*\Delta_4 \geq 0$	(2)
x_4	$2-(1/3)*\Delta_4 \geq 0$	(3)

Для определения допустимого интервала значений рассмотрим два случая:

1) $\Delta_4 \geq 0$.

Соотношения (1) и (2) выполняются в любом случае, соотношение (3) справедливо только при $\Delta_4 \leq 2$, таким образом, все три соотношения выполняются при $\Delta_4 \leq 2$.

2) $\Delta_4 < 0$.

Соотношения (2) и (3) всегда выполняются, соотношения (1) выполняется при $\Delta_4 \geq -3$, таким образом, все три соотношения выполняются при $\Delta_4 \geq -3$. Объединяя результаты вычислений $-3 \leq \Delta_2 \leq 2$ − для ресурса 3, получим уменьшение запаса ресурса 3 более чем на 3 и увеличение более чем на 2. Изменение запаса ресурса 3 будет равно: $-3+10 \leq$ ресурс $3 \leq 2+10$ или $7 \leq$ ресурс $3 \leq 12$.

2) Ценность каждого ресурса (вторая задача на чувствительность).

$L = 10 + (-1M*x_5 - 1M*x_6 + (1-1M)*x_7)$, $Y_5 = -1M$, $Y_6 = -1M$, $Y_7 = 1-1M$. Положительное приращение переменной x_5 относительно её текущего нулевого значения приводит к уменьшению L, причём коэффициент пропорциональности равен -1M. Из ограничений имеем: $2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8$ (1), что означает, что увеличение x_5, как следует из ограничения 1, эквивалентно снижению запаса ресурса 1, значит, уменьшение запаса 1 вызывает уменьшение целевой функции с тем же коэффициентом пропорциональности. Аналогично, справедливо для ресурсов 2 и 3.

Ценность ресурса характеризует интенсивность улучшения оптимального значения целевой функции. В оптимальной симплекс-таблице в L-строке у небазисных переменных x_1, x_5, x_6, x_7 коэффициенты соответственно равны 0; -1M; -1M и 1-1M. Таким образом, ресурс 3 является более ценным, чем ресурс 1 и 2, так как первый ассоциируется с остаточной переменной x_7.

3) Чувствительность оптимального решения на изменение коэффициентов целевой функции (третья задача на чувствительность).

а) Чтобы показать какие изменения происходят в симплекс-таблице при колебании x_2, число 1 (коэффициент второго слагаемого в L уравнении) примем равное $(1+\delta_1)$ и получим: $L = 2x_1 + (1+\delta_1)*x_2 + 2x_3 + 2x_4$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	L
L	0	0	0	0	$-1M+(2/3)*\delta_1$	$-1M+(2/3)*\delta_1$	$1-1M-1*\delta_1$	$10+2*\delta_1$

Из таблицы видно, что коэффициенты при δ_1 равны коэффициентам при x_5, x_6, x_7 в x_2 уравнении. Коэффициенты у небазисных переменных при оптимальном решении в F-уравнении ≤ 0, так как решается задача минимизации:

$$\begin{cases} -1M + \frac{2}{3}\delta_1 \leq 0; \\ 1-1M-1\delta_1 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 \leq \frac{3M}{2}; \\ \delta_1 \geq 1-1M; \end{cases} \Rightarrow 1-1M \leq \delta_1 \leq \frac{3M}{2}.$$

Таким образом, $1+1-1M \leq C_2 \leq 1+\frac{3M}{2} \Rightarrow 2-1M \leq C_2 \leq \frac{3M+2}{2}$.

b) Аналогично определяется C_3: чтобы показать какие изменения происходят в симплекс-таблице при колебании x_3, число 2 (коэффициент третьего слагаемого в L уравнении) примем равное $(2+\delta_2)$ и получим: $L = 2x_1 + x_2 + (2+\delta_2)*x_3 + 2x_4$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	L
L	0	0	0	0	$-1M-1*\delta_2$	$-1M+0*\delta_2$	$1-1M+1*\delta_2$	$10+2*\delta_2$

Из таблицы видно, что коэффициенты при δ_2 равны коэффициентам при x_5, x_6, x_7 в x_3 уравнении. Коэффициенты у небазисных переменных при оптимальном решении в F-уравнении ≤ 0, так как решается задача минимизации. $\begin{cases} -1M-1\delta_2 \leq 0; \\ -1M+0\delta_2 \leq 0; \\ 1-1M+1\delta_2 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_2 \geq -1M; \\ \delta_2 \leq 0 \\ \delta_2 \leq 1M-1; \end{cases} \Rightarrow -1M \leq \delta_2 \leq 0.$

Таким образом, $2-1M \leq C_3 \leq 2+0 \Rightarrow 2-1M \leq C_3 \leq 2$.

c) Аналогично определяется C_4: чтобы показать какие изменения происходят в симплекс-таблице при колебании x_4, число 2 (коэффициент четвертого слагаемого в L уравнении) примем равное $(2+\delta_3)$ и получим: $L = 2x_1 + x_2 + 2*x_3 + (2+\delta_3)*x_4$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	L
L	0	0	0	0	$-1M+(2/3)*\delta_3$	$-1M-(1/3)*\delta_3$	$1-1M+0*\delta_3$	$10+2*\delta_3$

$$\begin{cases} -1M + \frac{2}{3}\delta_3 \leq 0; \\ -1M - \frac{1}{3}\delta_3 \leq 0; \\ 1-1M+0\delta_3 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_3 \leq \frac{3M}{2}; \\ \delta_3 \geq -3M \\ \delta_3 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow -3M \leq \delta_3 \leq 0.$$

Таким образом, $2-3M \leq C_4 \leq 2+0 \Rightarrow 2-3M \leq C_4 \leq 2$. При этих δ_1, δ_2, δ_3 оптимальные значения переменных остаются постоянными, а оптимальное значение L уравнения изменяется.

Ответ: L(0; 2; 2; 2) = 10.

Задача №8. Решить задачу, используя алгоритм двойственного симплекс-метода

Условие

$L = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Приведем систему ограничений к системе неравенств смысла $\le$, умножив соответствующие строки на (-1). Определим минимальное значение целевой функции $L(X) = 2x_1 + x_2 + 5x_3$ при следующих условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4; \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \le -5; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \le -6. \end{cases}$$

Введем дополнительные переменные $x_4,\ x_5,\ x_6 \ge 0$ и приведем систему к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_6 = -6. \end{cases}$$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_4, x_5, x_6. Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план: X_0 = (0,0,0,4,-5,-6).

Базис	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	4	1	-1	-1	1	0	0
x_5	-5	-1	5	-1	0	1	0
x_6	-6	-2	1	-3	0	0	1
$L(X_0)$	0	-2	-1	-5	0	0	0
θ	0	-2 : (-2) = 1	-	-5 : (-3) = 5/3	-	-	-

План X_0 в симплексной таблице является псевдопланом, поэтому определяем ведущие строку и столбец. Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольший по модулю – (-6). Ведущей будет 3-ая строка, а переменную x_6 следует вывести из базиса. Минимальное значение θ соответствует 1-му столбцу, т.е. переменную x_1 необходимо ввести в базис. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент, равный (-2). Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса:

Базис	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	1	0	-0.5	-2.5	1	0	0.5
x_5	-2	0	4.5	0.5	0	1	-0.5
x_1	3	1	-0.5	1.5	0	0	-0.5
$L(X_1)$	6	0	-2	-2	0	0	-1
θ	0	-	-	-	-	-	-1 : (-1/2) = 2

План 1 в симплексной таблице является псевдопланом, поэтому определяем ведущие строку и столбец. Среди отрицательных значений базисных переменных

выбираем наибольший по модулю – (-2). Ведущей будет 2-ая строка, а переменную x_5 следует вывести из базиса. Минимальное значение θ соответствует 6-му столбцу, т.е. переменную x_6 необходимо ввести в базис. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент, равный (-0.5). Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса:

Базис	**B**	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$
x_4	-1	0	4	-2	1	1	0
x_6	4	0	-9	-1	0	-2	1
x_1	5	1	-5	1	0	-1	0
$L(X_2)$	10	0	-11	-3	0	-2	0
θ	0	-	-	-3 : (-2) = 1.5	-	-	-
x_3	0.5	0	-2	1	-0.5	-0.5	0
x_6	4.5	0	-11	0	-0.5	-2.5	1
x_1	4.5	1	-3	0	0.5	-0.5	0
$L(X_3)$	11.5	0	-17	0	-1.5	-3.5	0

В базисном столбце все элементы положительные. Переходим к основному алгоритму симплекс-метода. В индексной строке нет положительных элементов. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи: $x_1 = 4.5$, $x_3 = 0.5$ и $L(X) = 2*4.5 + 5*0.5 = 11.5$.

Ответ: L(4.5; 0; 0.5) = 11.5.

Задача №9. Для исходной задачи составить двойственную. Решить обе задачи симплексным методом или двойственным симплексным методом и по решению каждой из них найти решение другой. Одну из задач решить графическим методом

Условие

$L = -x_1 - x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,3. \end{cases}$$

Решение

1) Составляем двойственную задачу.

Заметим, что каждое слагаемое в левой части ограничений должно измеряться в тех же единицах, что и правая. Целевая функция в двойственной задаче определяет стоимость запасов всех ресурсов. Левая часть ограничений определяет стоимость ресурсов в теневых (альтернативных) ценах, затраченных на x_j.

$Z = y_1 + 2y_2 \ \to\ \min;$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = -1; \\ y_1 - y_2 = -1; \\ -y_1 - y_2 = -16; \\ y_1 \le 0; \\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

2) Решим прямую задачу.

Введем базисные переменные $x_4,\ x_5 \ge 0$ и приведем систему к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$$

Введем искусственные переменные x_6:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$$

Для постановки задачи на максимум целевую функцию запишем так:

$L(X) = -x_1 - x_2 - x_3 - Mx_6 \to \max$. Из уравнений выражаем искусственные переменные: $x_6 = 6 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$, которые подставляем в целевую функцию:

$L(X) = (-1+1M)x_1 + (-1+1M)x_2 + (-1-1M)x_3 + (-1M)x_4 - 6M \ \to\ \max$.

Базис	**B**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	6	1	1	-1	-1	0	1
x_5	2	2	-1	-1	0	1	0
$L(X_0)$	-6M	1-1M	1-1M	1+1M	1M	0	0
x_2	6	1	1	-1	-1	0	1
x_5	8	3	0	-2	-1	1	1
$L(X_1)$	-6	0	0	2	1	0	-1+1M

В индексной строке нет отрицательных элементов. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи: x_2 = 6 и L(X) = -1*6 = -6.

3) Решим двойственную задачу из прямой.

Переменные y_j называются допустимым решением двойственной задачи. Переменные y_j называются оптимальными, если они допустимые и на них целевая функция достигает минимальное значения.

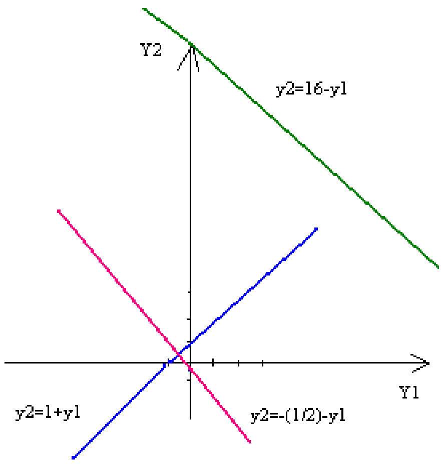
Используя последнюю итерацию прямой задачи, найдем оптимальный план двойственной задачи. Из первой теоремы двойственности следует, что $Y = C*A^{-1}$.

Составим матрицу A из компонентов векторов, входящих в оптимальный базис: $A(a_2, a_5) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$. Определив обратную матрицу A^{-1} через алгебраические дополнения, получим: $A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Как видно из последнего плана симплексной таблицы, обратная матрица A^{-1} расположена в столбцах дополнительных переменных. Тогда $Y = C*A^{-1} = (-1, 0) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1;0)$. Оптимальный план двойственной задачи равен: $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ и Z(Y) = 6*(-1)+2*0 = -6.

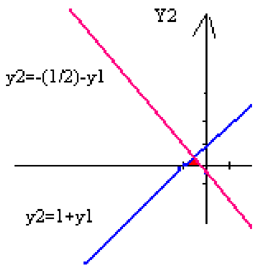
4) Решим прямую задачу графическим методом.

Рассматриваем каждое из ограничений отдельно:

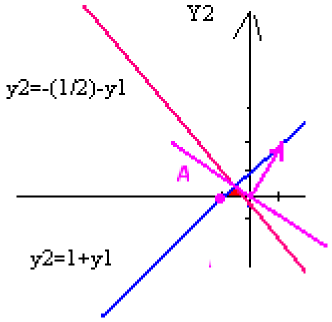
Первое, второе и третье ограничения: $y_1 + 2y_2 = -1; y_1 - y_2 = -1; -y_1 - y_2 = -16$. Изобразим их:



Четвертое и пятое условия: $y_1 \le 0; y_2 \ge 0.$. Получаем следующую ОДР:



Найдем минимум $Z = y_1 + 2y_2$: для этого построим прямую $y_1 + 2y_2 = 0$ и градиент – вектор (1; 2) – и будем двигаться в направлении антигрдиента:



Самой крайней точкой области при этом окажется А – точка пересечения прямых $y_1 - y_2 = -1; y_2 = 0$, с координатами А(-1; 0). Это значит, что при $y_1 = -1; y_2 = 0$ достигается минимум целевой функции, равный -6.

Ответ: L(0; 6; 0) = -6.

Задача №10. Решить следующую задачу распределительным методом и методом потенциалов

Условие

$A:90;110;$

$B:80;50;40;30;$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение

1) **Распределительный метод** является одним из вариантов базового симплексного метода.

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	3	7	5	2	90
A2	5	3	1	7	110
Потребности	80	50	40	30	

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи: $\sum a = 90 + 110 = 200$; $\sum b = 80 + 50 + 40 + 30 = 200$. Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Первый опорный план найдем, используя метод наименьшей стоимости. Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_j. Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены. Получаем:

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	3[60]	7	5	2[30]	90
A2	5[20]	3[50]	1[40]	7	110
Потребности	80	50	40	30	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 5, а должно быть $m + n - 1 = 5$. Следовательно, опорный план является невырожденным. Значение целевой функции для этого опорного плана равно: 3*60 + 2*30 + 5*20 + 3*50 + 1*40 = 530.

Чтобы установить является ли опорный план оптимальным, надо проверить, как повлияет на величину целевой функции любое возможное перераспределение поставок. План распределения поставок будет оптимальным лишь в том случае, когда целевая функция имеет минимальное значение, т.е. когда дальнейшее уменьшение затрат на поставку будет невозможно.

Проверим: для каждой свободной от поставки клетки определяется величина Δ_{ij}, характеризующая изменение суммарных затрат на поставку (в расчете на единицу перераспределяемой продукции), при условии включения в план единичной поставки $x_{ij}=1$ от поставщика Ai к потребителю Bj. При этом должно быть произведено такое изменение остальных поставок, чтобы получившаяся совокупность поставок не нарушала баланса спроса и поставок транспортной задачи. С этой целью для каждой свободной клетки составляется означенный цикл перерасчета - замкнутая ломаная линия. Вершинами цикла (цепи) являются клетки таблицы, проще – вершины лежат в клетках таблицы, причем одна из вершин находится в свободной от поставки клетке, в той, для которой определяется оценка Δij. Все другие вершины находятся в базисных клетках, т.е. клетках, занятых поставками.

Вершины, в которых поставки при перераспределении увеличиваются, отмечаются плюсом и называются положительными вершинами и, наоборот, вершины, в которых поставки при перераспределении уменьшаются, отмечаются минусом и называются отрицательными вершинами.

В цикле знаки по вершинам расставляют, начиная с вершины, лежащей в свободной клетке, для которой определяется Δij. В нее записывают знак плюс, затем знаки по вершинам чередуются: минус, плюс, минус, плюс и т. д., независимо от того, расставляют ли их по часовой стрелке или в обратном направлении. Таким образом, в цикле всегда насчитывается одинаковое число положительных и отрицательных вершин.

Если при каком-то опорном плане оказывается несколько свободных клеток с отрицательными оценками Δij, то за один переход к лучшему плану можно занять поставкой только одну клетку – ту, которая обеспечивает наибольшее снижение целевой функции.

Шаг 1. Определяем оценку для каждой свободной клетки.

(1;2): В свободную клетку (1;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	3[60] [-]	7[+]	5	2[30]	90
A2	5[20] [+]	3[50] [-]	1[40]	7	110
Потребности	80	50	40	30	

Цикл приведен в таблице (1,2; 1,1; 2,1; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ12 = (7) - (3) + (5) - (3) = 6.

(1;3): В свободную клетку (1;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	3[60] [-]	7	5[+]	2[30]	90
A2	5[20] [+]	3[50]	1[40] [-]	7	110
Потребности	80	50	40	30	

Цикл приведен в таблице (1,3; 1,1; 2,1; 2,3;). Оценка свободной клетки равна Δ13 = (5) - (3) + (5) - (1) = 6.

(2;4): В свободную клетку (2;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	3[60] [+]	7	5	2[30] [-]	90
A2	5[20] [-]	3[50]	1[40]	7[+]	110
Потребности	80	50	40	30	

Цикл приведен в таблице (2,4; 2,1; 1,1; 1,4;). Оценка свободной клетки равна Δ24 = (7) - (5) + (3) - (2) = 3.

Из приведенного расчета видно, что ни одна свободная клетка не имеет отрицательной оценки, следовательно, дальнейшее снижение целевой функции F(x) невозможно, поскольку она достигла минимального значения. Таким образом, последний опорный план является оптимальным. Минимальные затраты составят: 530.

2) Метод потенциалов.

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи:

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	3[60]	7	5	2[30]	90
A2	5[20]	3[50]	1[40]	7	110
Потребности	80	50	40	30	

В результате получен первый опорный план, значение целевой функции для этого опорного плана равно: F(x) = 3*60 + 2*30 + 5*20 + 3*50 + 1*40 = 530.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vi по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0:

$u1 + v1 = 3;\ 0 + v1 = 3;\ v1 = 3;$

$u2 + v1 = 5;\ 3 + u2 = 5;\ u2 = 2;$

$u2 + v2 = 3;\ 2 + v2 = 3;\ v2 = 1;$

$u2 + v3 = 1;\ 2 + v3 = 1;\ v3 = -1;$

$u1 + v4 = 2;\ 0 + v4 = 2;\ v4 = 2.$

	v1=3	v2=1	v3= -1	v4=2
u1=0	3[60]	7	5	2[30]
u2=2	5[20]	3[50]	1[40]	7

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vi <= cij. Минимальные затраты составят: F(x) = 530.

Ответ: F(x) = 3*60 + 2*30 + 5*20 + 3*50 + 1*40 = 530.

Задача №11. Решить транспортную задачу распределительным методом и методом потенциалов

Условие

Завод имеет три цеха А, В, С и четыре склада.1, 2, 3, и 4. Цех А производит 30 тыс. шт. изделий, цех В – 40 тыс. шт., цех С – 20 тыс. шт. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 – 20 тыс. шт., склад 2 – 30 тыс. шт., склад 3 – 30 тыс. шт., склад 4 – 10 тыс. шт. Стоимости перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха А в склады 1, 2, 3, 4 соответственно равны 2, 3, 2, 4 д.е., из цеха В – 3, 2, 5, 1 д.е., из цеха С – 4, 3, 2, 6 д.е. Составить такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы минимальными.

Решение

Модель задачи имеет вид:

	1	2	3	4	Запасы
A	2	3	2	4	30
B	3	2	5	1	40
C	4	3	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	

1) **Распределительный метод.** Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи: ∑ a = 30 + 40 + 20 = 90; ∑ b = 20 + 30 + 30 + 10 = 90. Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Используя метод северо-западного угла, построим первый опорный план транспортной задачи. План начинается заполняться с верхнего левого угла:

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10]	2	4	30
B	3	2[20]	5[20]	1	40
C	4	3	2[10]	6[10]	20
Потребности	20	30	30	10	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 6, а должно быть m + n - 1 = 6. Следовательно, опорный план является невырожденным. Значение целевой функции для этого опорного плана равно: F(x) = 2*20 + 3*10 + 2*20 + 5*20 + 2*10 + 6*10 = 290.

Проверим возможность уменьшения суммарных затрат на поставку продукции.

Шаг 1. Определяем оценку для каждой свободной клетки.

(1;3): В свободную клетку (1;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10][-]	2[+]	4	30
B	3	2[20][+]	5[20][-]	1	40
C	4	3	2[10]	6[10]	20

Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,3; 1,2; 2,2; 2,3;). Оценка свободной клетки равна Δ13 = (2) - (3) + (2) - (5) = -4.

(1;4): В свободную клетку (1;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10] [-]	2	4[+]	30
B	3	2[20] [+]	5[20] [-]	1	40
C	4	3	2[10] [+]	6[10] [-]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,4; 1,2; 2,2; 2,3; 3,3; 3,4;). Оценка свободной клетки равна Δ14 = (4) - (3) + (2) - (5) + (2) - (6) = -6.

(2;1): В свободную клетку (2;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20] [-]	3[10] [+]	2	4	30
B	3[+]	2[20] [-]	5[20]	1	40
C	4	3	2[10]	6[10]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (2,1; 2,2; 1,2; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ21 = (3) - (2) + (3) - (2) = 2.

(2;4): В свободную клетку (2;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10]	2	4	30
B	3	2[20]	5[20] [-]	1[+]	40
C	4	3	2[10] [+]	6[10] [-]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (2,4; 2,3; 3,3; 3,4;). Оценка свободной клетки равна Δ24 = (1) - (5) + (2) - (6) = -8.

(3;1): В свободную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20] [-]	3[10] [+]	2	4	30
B	3	2[20] [-]	5[20] [+]	1	40
C	4[+]	3	2[10]	6[10]	20

			[-]		
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,1; 3,3; 2,3; 2,2; 1,2; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ31 = (4) - (2) + (5) - (2) + (3) - (2) = 6.

(3;2): В свободную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10]	2	4	30
B	3	2[20] [-]	5[20] [+]	1	40
C	4	3[+]	2[10] [-]	6[10]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,2; 3,3; 2,3; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ32 = (3) - (2) + (5) - (2) = 4.

Опорный план является неоптимальным, поскольку имеется отрицательная оценка клетки (2,4), равная -8.

Поскольку в исходном опорном плане рассматриваемой задачи свободная клетка (2;4) имеет отрицательную оценку, то для получения плана, обеспечивающего меньшее значение целевой функции, эту клетку следует занять возможно большей поставкой, не нарушающей при этом условий допустимости плана.

Из грузов xij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (3, 4) = 10. Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из Xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план:

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10]	2	4	30
B	3	2[20]	5[10]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

F(x) = 2*20 + 3*10 + 2*20 + 5*10 + 1*10 + 2*20 = 210.

Шаг 2. Определяем оценку для каждой свободной клетки.

(1;3): В свободную клетку (1;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10] [-]	2[+]	4	30
B	3	2[20] [+]	5[10] [-]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,3; 1,2; 2,2; 2,3;). Оценка свободной клетки равна Δ13 = (2) - (3) + (2) - (5) = -4.

(1;4): В свободную клетку (1;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10] [-]	2	4[+]	30
B	3	2[20] [+]	5[10]	1[10] [-]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,4; 1,2; 2,2; 2,4;). Оценка свободной клетки равна Δ14 = (4) - (3) + (2) - (1) = 2.

(2;1): В свободную клетку (2;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20] [-]	3[10] [+]	2	4	30
B	3[+]	2[20] [-]	5[10]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (2,1; 2,2; 1,2; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ21 = (3) - (2) + (3) - (2) = 2.

(3;1): В свободную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20] [-]	3[10] [+]	2	4	30
B	3	2[20] [-]	5[10] [+]	1[10]	40
C	4[+]	3	2[20] [-]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,1; 3,3; 2,3; 2,2; 1,2; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ31 = (4) - (2) + (5) - (2) + (3) - (2) = 6.

(3;2): В свободную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10]	2	4	30
B	3	2[20] [-]	5[10] [+]	1[10]	40
C	4	3[+]	2[20] [-]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,2; 3,3; 2,3; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ32 = (3) - (2) + (5) - (2) = 4.

(3;4): В свободную клетку (3;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[10]	2	4	30
B	3	2[20]	5[10] [+]	1[10] [-]	40
C	4	3	2[20] [-]	6[+]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,4; 3,3; 2,3; 2,4;). Оценка свободной клетки равна Δ34 = (6) - (2) + (5) - (1) = 8.

Опорный план является неоптимальным, поскольку имеется отрицательная оценка клетки (1,3), равная -4.

Поскольку в исходном опорном плане рассматриваемой задачи свободная клетка (1;3) имеет отрицательную оценку, то для получения плана, обеспечивающего меньшее значение целевой функции, эту клетку следует занять возможно большей поставкой, не нарушающей при этом условий допустимости плана.

Из грузов xij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (1, 2) = 10. Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из Xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план:

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[30]	5[0]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

F(x) = 2*20 + 2*10 + 2*30 + 1*10 + 2*20 = 170.

Шаг 3. Определяем оценку для каждой свободной клетки.

(1;2): В свободную клетку (1;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3[+]	2[10] [-]	4	30
B	3	2[30] [-]	5[0][+]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,2; 1,3; 2,3; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ12 = (3) - (2) + (5) - (2) = 4.

(1;4): В свободную клетку (1;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10] [-]	4[+]	30
B	3	2[30]	5[0][+]	1[10] [-]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,4; 1,3; 2,3; 2,4;). Оценка свободной клетки равна Δ14 = (4) - (2) + (5) - (1) = 6.

(2;1): В свободную клетку (2;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3	2[10][+]	4	30
B	3[+]	2[30]	5[0][-]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (2,1; 2,3; 1,3; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ21 = (3) - (5) + (2) - (2) = -2.

(3;1): В свободную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3	2[10][+]	4	30
B	3	2[30]	5[0]	1[10]	40
C	4[+]	3	2[20][-]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,1; 3,3; 1,3; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ31 = (4) - (2) + (2) - (2) = 2.

(3;2): В свободную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[30][-]	5[0][+]	1[10]	40
C	4	3[+]	2[20][-]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,2; 3,3; 2,3; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ32 = (3) - (2) + (5) - (2) = 4.

(3;4): В свободную клетку (3;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[30]	5[0][+]	1[10][-]	40
C	4	3	2[20][-]	6[+]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,4; 3,3; 2,3; 2,4;). Оценка свободной клетки равна Δ34 = (6) - (2) + (5) - (1) = 8.

Опорный план является неоптимальным, поскольку имеется отрицательная оценка клетки (2,1), равная -2.

Поскольку в исходном опорном плане рассматриваемой задачи свободная клетка (2;1) имеет отрицательную оценку, то для получения плана, обеспечивающего меньшее значение целевой функции, эту клетку следует занять возможно большей поставкой, не нарушающей при этом условий допустимости плана.

Из грузов xij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (2, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план:

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3[0]	2[30]	5	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

F(x) = 2*20 + 2*10 + 2*30 + 1*10 + 2*20 = 170.

Шаг 4. Определяем оценку для каждой свободной клетки.

(1;2): В свободную клетку (1;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3[+]	2[10]	4	30
B	3[0][+]	2[30][-]	5	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,2; 1,1; 2,1; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ12 = (3) - (2) + (3) - (2) = 2.

(1;4): В свободную клетку (1;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3	2[10]	4[+]	30
B	3[0][+]	2[30]	5	1[10][-]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (1,4; 1,1; 2,1; 2,4;). Оценка свободной клетки равна Δ14 = (4) - (2) + (3) - (1) = 4.

(2;3): В свободную клетку (2;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][+]	3	2[10][-]	4	30

B	3[0][-]	2[30]	5[+]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (2,3; 2,1; 1,1; 1,3;). Оценка свободной клетки равна Δ23 = (5) - (3) + (2) - (2) = 2.

(3;1): В свободную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3	2[10][+]	4	30
B	3[0]	2[30]	5	1[10]	40
C	4[+]	3	2[20][-]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,1; 3,3; 1,3; 1,1;). Оценка свободной клетки равна Δ31 = (4) - (2) + (2) - (2) = 2.

(3;2): В свободную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3	2[10][+]	4	30
B	3[0][+]	2[30][-]	5	1[10]	40
C	4	3[+]	2[20][-]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,2; 3,3; 1,3; 1,1; 2,1; 2,2;). Оценка свободной клетки равна Δ32 = (3) - (2) + (2) - (2) + (3) - (2) = 2.

(3;4): В свободную клетку (3;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20][-]	3	2[10][+]	4	30
B	3[0][+]	2[30]	5	1[10][-]	40
C	4	3	2[20][-]	6[+]	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,4; 3,3; 1,3; 1,1; 2,1; 2,4;). Оценка свободной клетки равна Δ34 = (6) - (2) + (2) - (2) + (3) - (1) = 6.

Из приведенного расчета видно, что ни одна свободная клетка не имеет отрицательной оценки, следовательно, дальнейшее снижение целевой функции F(x) невозможно, поскольку она достигла минимального значения.

Таким образом, последний опорный план является оптимальным: F(x) = 2*20 + 2*10 + 2*30 + 1*10 + 2*20 = 170.

2) Метод потенциалов.

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[30]	5	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 5, а должно быть m + n - 1 = 6. Следовательно, опорный план является вырожденным.

Строим новый план. Значение целевой функции для этого опорного плана равно F(x) = 2*20 + 2*10 + 2*30 + 1*10 + 2*20 = 170.

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[10]	5[20]	1[10]	40
C	4	3[20]	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи. Число занятых клеток таблицы 6, а должно быть m + n - 1 = 6. Следовательно, опорный план является невырожденным. Значение целевой функции для этого опорного плана равно: F(x) = 2*20 + 2*10 + 2*10 + 5*20 + 1*10 + 3*20 = 250.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0:

$u1 + v1 = 2;\ 0 + v1 = 2;\ v1 = 2;$

$u1 + v3 = 2;\ 0 + v3 = 2;\ v3 = 2;$

$u2 + v3 = 5;\ 2 + u2 = 5;\ u2 = 3;$

$u2 + v2 = 2;\ 3 + v2 = 2;\ v2 = -1;$

$u3 + v2 = 3;\ -1 + u3 = 3;\ u3 = 4;$

$u2 + v4 = 1;\ 3 + v4 = 1;\ v4 = -2.$

	v1=2	v2=-1	v3=2	v4=-2
u1=0	2[20]	3	2[10]	4
u2=3	3	2[10]	5[20]	1[10]
u3=4	4	3[20]	2	6

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vi > cij:

$(2;1):\ 3 + 2 > 3;\ \Delta 21 = 3 + 2 - 3 = 2;$

$(3;1):\ 4 + 2 > 4;\ \Delta 31 = 4 + 2 - 4 = 2;$

$(3;3):\ 4 + 2 > 2;\ \Delta 33 = 4 + 2 - 2 = 4;$

$\max(2, 2, 4) = 4.$

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;3): 2. Для этого в перспективную клетку (3;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[10] [+]	5[20] [-]	1[10]	40
C	4	3[20] [-]	2[+]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (3,3; 3,2; 2,2; 2,3;). Из грузов xij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 2) = 20. Прибавляем 20 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из Xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план:

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3	2[30]	5[0]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0:

$u1 + v1 = 2;\ 0 + v1 = 2;\ v1 = 2;$

$u1 + v3 = 2;\ 0 + v3 = 2;\ v3 = 2;$

$u2 + v3 = 5;\ 2 + u2 = 5;\ u2 = 3;$

$u2 + v2 = 2;\ 3 + v2 = 2;\ v2 = -1;$

$u2 + v4 = 1;\ 3 + v4 = 1;\ v4 = -2;$

$u3 + v3 = 2;\ 2 + u3 = 2;\ u3 = 0.$

	v1=2	v2=-1	v3=2	v4=-2
u1=0	2[20]	3	2[10]	4
u2=3	3	2[30]	5[0]	1[10]
u3=0	4	3	2[20]	6

Опорный план не является оптимальным, так как существует оценка свободной клетки, для которой ui + vi > cij: (2;1): 3 + 2 > 3; Δ21 = 3 + 2 - 3 = 2. Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;1): 3. Для этого в перспективную клетку (2;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20] [-]	3	2[10] [+]	4	30
B	3[+]	2[30]	5[0][-]	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Цикл приведен в таблице (2,1; 2,3; 1,3; 1,1;). Из грузов xij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план:

	1	2	3	4	Запасы
A	2[20]	3	2[10]	4	30
B	3[0]	2[30]	5	1[10]	40
C	4	3	2[20]	6	20
Потребности	20	30	30	10	

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0:

u1 + v1 = 2; 0 + v1 = 2; v1 = 2;

u2 + v1 = 3; 2 + u2 = 3; u2 = 1;

u2 + v2 = 2; 1 + v2 = 2; v2 = 1;

u2 + v4 = 1; 1 + v4 = 1; v4 = 0;

u1 + v3 = 2; 0 + v3 = 2; v3 = 2;

u3 + v3 = 2; 2 + u3 = 2; u3 = 0.

	v1=2	v2=1	v3=2	v4=0
u1=0	2[20]	3	2[10]	4
u2=1	3[0]	2[30]	5	1[10]
u3=0	4	3	2[20]	6

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vi <= cij. Минимальные затраты составят: F(x) = 2*20 + 2*10 + 2*30 + 1*10 + 2*20 = 170.

Ответ: F(x)=170.